USTHB
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département d'Informatique
Master 2 SII
Représentation des connaissances 2

Année Universitaire : 2022-2023

TD2-TP1
Théorie des Fonctions de Croyance

Rappel :

- Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modélis l'ignorance et l'arbitraire.

- Différentes théories :
  - Théorie des possibilités (Zadeh, 1978 ; Dubois and Prade 1980's-1990's) ;
  - Théorie des probabilités imprécises (Walley, 1990's) ;
  - Théorie des fonctions de croyance (Théorie de Dempster-Shafer, théorie de l'évidence, modèle des croyances transférables)(Dempster, 1968 ; Shafer, 1976 ; Smets 1980's-1990's).

A- MODELISATION

Considérons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ (cadre de discernement) un ensemble fini de réponses à une certaine question Q d'intérêt.

Définition (fonction de masse)

Une fonction de masse de croyance sur Ω est une application $m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ t.q.

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

Tout $A \subseteq \Omega$, $m(A) > 0$ est appelé élément focal (EF) de m.

La fonction de masse m représente :

- l'état de connaissance d'un agent rationnel à un certain instant t, relativement à Q.

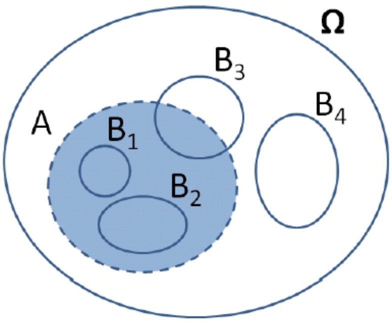
Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Masse $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Résumé :

- fonction de masse de croyance = opinion pondérée ;
- à chaque alternative du monde est associé un nombre entre 0 et 1.

Fonction de croyance et fonction de plausibilité
Définitions



$bel(A) = m(B_1) + m(B_2)$
$pl(A) = m(B_1)+m(B_2)+m(B_3)$

- $bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega$.
- **Interprétation :** $bel(A)$ représente la part totale de croyance soutenant A.
- $pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega$.
- **Interprétation :** $pl(A)$ représente la part maximale de croyance qui pourrait soutenir A.

- $bel(A \cup B) \geqslant bel(A) + bel(B) - bel(A \cap B)$
- $pl(A \cup B) \leqslant pl(A) + pl(B) - pl(A \cap B)$

bel et *pl* sont des mesures non additives .

$$bel(A) = pl(\Omega) - pl(\overline{A}), \quad \forall A \subseteq \Omega$$

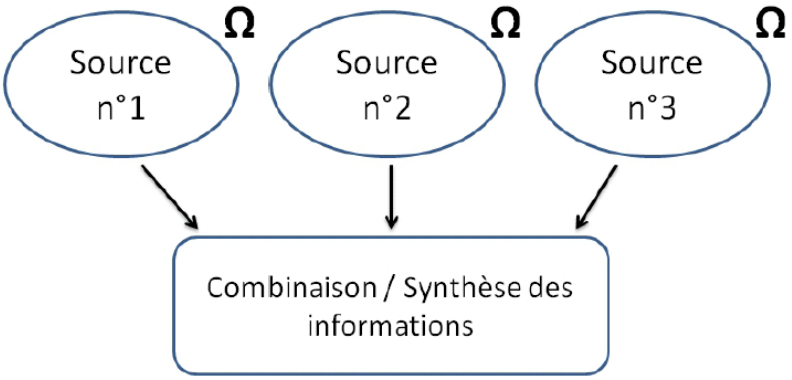
B- FUSION DES INFORMATION :

Fusion d'informations

On considère différentes sources d'information qui :

- s'expriment sur le même cadre de discernement ;
- donnent des informations sur le même objet ;

On cherche alors à synthétiser/combiner ces informations via une seule masse de croyance.



Somme conjonctive

Propriétés :

- commutativité, associativité
- m(Ω)=1 élément neutre
- m(∅)=1 élément absorbant

Degré de conflit :

$$K = (m_1 \cap m_2)(\varnothing) = \sum_{A \cap B = \varnothing} m_1(A) \cdot m_2(B)$$

Règle de Dempster : somme conjonctive + normalisation

$$(m_1 \oplus m_2)(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A) \cdot m_2(B)}{1 - K}$$

Somme disjonctive

L'une au moins des deux sources d'information est fiable : combinaison disjonctive :

Degré de conflit :

$$K = (m_1 \cap m_2)(\varnothing) = \sum_{A \cap B = \varnothing} m_1(A) \cdot m_2(B)$$

$$(m_1 \textcircled{\cup} m_2)(C) = \sum_{A \cup B = C} m_1(A) m_2(B)$$

somme disjonctive + normalisation

$$(m_1 \textcircled{\cup} m_2)(C) = \sum_{A \cup B = C} \frac{m_1(A) m_2(B)}{1-K}$$

Affaiblissement

Situation d'application

- Il est parfois possible d'avoir un doute sur la fiabilité d'une information m fournie par une source S.
- Avec $\alpha \in [0,1]$ (appelé taux d'affaiblissement) t.q. $(1-\alpha)$ représente le degré de fiabilité de la source.

Opération d'affaiblissement (discounting)

$$\begin{cases} {}^{\alpha}m(A) & = & (1-\alpha)m(A), \quad \forall A \subset \Omega, \\ {}^{\alpha}m(\Omega) & = & (1-\alpha)m(\Omega) + \alpha \ , \end{cases}$$

ou, plus simplement : ${}^{\alpha}m = (1-\alpha)m + \alpha \ m_{\Omega}$.

Exemple

- $\Omega = \{a, b, c\}, m(\{a\}) = 0.3, m(\Omega) = 0.7$.
- La source est fiable avec un degré 0.6, i.e. $\alpha = 0.4$.
- Alors ${}^{\alpha}m(\{a\}) = 0.18, {}^{\alpha}m(\Omega) = 0.82$.

<u>Exercice 1 :</u>

Quatre scientifiques discutent sur les causes de la transmission du coronavirus à l'homme.

- Le premier scientifique atteste que la source provient d'un mammifère à 65% et d'un ovipare à 24%.
- Le deuxième expert affirme que le virus provient du serpent à 48%.
- Le troisième scientifique met en cause avec des probabilités égales le Pangolin la chauvesouris et le serpent.
- Le quatrième expert est totalement certain que la source vient d'un animal sauvage.

a- Représentez ces connaissances en utilisant la théorie de Dempster-Shafer en spécifiant les particularités de chaque distribution de masse.

Ω={Pangolin (P), Chauve-souris (c), Serpent (s)}

Propriétés d'une distribution de masse :

$\Sigma m(A)=1$

$M(\emptyset)=0$

Expert 1 :

$M_1(\{P,C\})=0.65$

$M_1(\{S\})= 0.24$

$M_1(\Omega)=0.11$

Les éléments focaux sont quelconques, ce qui correspond au cadre général de ma théorie des fonctions de croyance.

BEL (A) <= P(A) <= PL(A)

Expert 2 :

$M_2(\{S\})= 0.48$

$M_2(\Omega)=0.52$

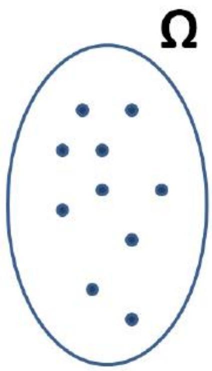
Les éléments focaux sont emboités, ce qui correspond au cadre possibiliste.

Expert 3 : equiprobabilité

$M_3(\{P\})= M(\{C\})= 0.24= M_3(S)=0.33$

Les éléments focaux sont des singletons, ce qui correspond au cadre probabiliste.

BEL (A) = P(A) = PL(A)



Expert 4 :

$M_4(\Omega)=1$: ignorance totale

b- Sachant que la première source est affaiblie à 12%, comment peut-on prendre en compte ces différents indices afin de trouver le coupable. Explicitez Que peut-on conclure?

Affaiblissement de la première source avec $\alpha=0.12$

$M'(\{A\})= (1-\alpha)*m(A)$

$M'(\Omega)=(1-\alpha)*m(\Omega) + \alpha$

Il vient :

Expert 1 :

M'_1 ({P,C})=(1-0.12)*0.65=0.572

M'_1({S})= (1-0.12)*0.24=0.2112

M'_1 (Ω)=(1-0.12)*0.11+0.12=0.2168

Combinaison conjonctive :

$$m(A)=\frac{\sum_{B\cap C=A} m_1(B)*m_2(C)}{1-K}, \quad \forall A\in 2^{\Omega}\setminus\{\varnothing\}\ ;\ \forall B,C\in 2^{\Omega}\ ; \qquad \text{(équation 2)}$$

Avec k le degré de conflit défini par:

$$K=\sum_{B\cap C=\varnothing} m_1(B)*m_2(C), \quad \forall B,C\in 2^{\Omega}\ ; \qquad \text{(équation 3)}$$

Etape 1 : combinaison m'_1 et m_2 :

M'_1 / M_2	{S} 0.2112	{P,C} 0.572	Ω 0.2168
{S} 0.48	{S} 0.1013	∅ **0.2745**	{S} 0.104
Ω 0.52	{S} 0.1098	{P,C} 0.2974	Ω 0.1127

K=0.2745 ; 1/1-k=1.3783

M_{12}({S})=1.3783*(0.1013+0.1098+0.104)=0.4343

M_{12}({P,C})=1.3783*0.2974=0.409

M_{12}(Ω)= 1.3783*0.1127=0.1553

Etape 2 : combinaison m_{12} et m_3 :

M_{12} / M_3	{S} 0.4343	{P,C} 0.409	Ω 0.1533
{P} 0.33	∅ **0.1433**	{P} 0.1349	{P} 0.0512
{C} 0.33	∅ **0.1433**	{C} 0.1349	{C} 0.0512
{S} 0.33	{S} 0.1433	∅ **0.1349**	{S} 0.0512

K=0.4215 ; 1/1-k=1.7286

M_{123}({P})=1.7286*(0.1349+0.0512)=0.3216

M_{123}({C})=1.7286*(0.1349+0.0512)=0.3216

M_{123}(S)= 1.7286*(0.1433+0.0512.)=0.3362

Exercice 2:

Quatre personnes (B,J,S,K) sont enfermés dans une pièce lorsque les lumières s'éteignent. Lorsque les lumières s'allument, K est mort, poignardé avec un couteau. Il n'y a pas eu de suicide et aucune autre personne n'est rentrée dans la pièce. Nous supposons qu'il y' a un seul meurtrier.

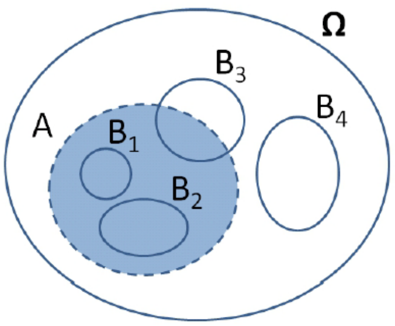
Un détective après avoir examiné les lieux du crime, affecte la masse des probabilités des différents éléments comme suit :

Evénement	Masse
Personne n'est coupable	0
B est coupable	0.1
J est coupable	0.2
S est coupable	0.1
B ou J est coupable	0.1
B ou S est coupable	0.1
S ou J est coupable	0.3
Un des trois est coupable	0.1

a- Calculez les degrés de croyances de l'ensemble des éléments.

Fonction de croyance et fonction de plausibilité

Définitions



$bel(A) = m(B_1) + m(B_2)$

$pl(A) = m(B_1) + m(B_2) + m(B_3)$

- $bel(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega$.
- **Interprétation :** $bel(A)$ représente la part totale de croyance soutenant A.
- $pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B), \quad \forall A \subseteq \Omega$.
- **Interprétation :** $pl(A)$ représente la part maximale de croyance qui pourrait soutenir A.

LGI2A

Belief in A: example

- Given the mass assignments as assigned by the detectives:

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
m(A)	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

- bel({B}) = m({B}) = 0.1
- bel({B,J}) = m({B})+m({J})+m({B,J}) =0.1+0.2+0.1=0.4
- Result:

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
m(A)	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
bel(A)	0.1	0.2	0.1	0.4	0.3	0.6	1.0

b- Calculez les degrés de plausibilité associés aux différents éléments.

Plausibility of A: pl(A)

The plausability of an element A, pl(A), is the sum of all the masses of the sets that intersect with the set *A*:

E.g. pl({B,J}) = m(B)+m(J)+m(B,J)+m(B,S)
+m(J,S)+m(B,J,S)
= 0.9

All Results:

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
m(A)	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
pl(A)	0.4	0.7	0.6	0.9	0.8	0.9	1.0

c- Calculez le degré de doute associé aux différents éléments :

Disbelief (or Doubt) in A: dis(A)

The disbelief in A is simply bel(¬A).

It is calculated by summing all masses of elements which do not intersect with A.

The plausibility of A is thus 1-dis(A):

$$pl(A) = 1 - dis(A)$$

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
m(A)	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
dis(A)	0.6	0.3	0.4	0.1	0.2	0.1	0
pl(A)	0.4	0.7	0.6	0.9	0.8	0.9	1.0

d- En déduire les intervalles de confiance associés aux éléments :

Belief Interval of A:

The certainty associated with a given subset A is defined by the belief interval:

$$[\ bel(A)\ \ pl(A)\ ]$$

Belief Intervals & Probability

The probability in A falls somewhere between bel(A) and pl(A).

- bel(A) represents the evidence we have for A directly. So prob(A) cannot be less than this value.
- pl(A) represents the maximum share of the evidence we could possibly have, if, for all sets that intersect with A, the part that intersects is actually valid. So pl(A) is the maximum possible value of prob(A).

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
m(A)	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
bel(A)	0.1	0.2	0.1	0.4	0.3	0.6	1.0
pl(A)	0.4	0.7	0.6	0.9	0.8	0.9	1.0

Belief intervals allow Demspter-Shafer theory to reason about the degree of certainty or certainty of our beliefs.

- A small difference between belief and plausibility shows that we are certain about our belief.
- A large difference shows that we are uncertain about our belief.

However, even with a 0 interval, this does not mean we know which conclusion is right. Just how probable it is!

e- Que peut-on conclure.

Exercice 3 :

Un grand débat a été enclenché à la suite à l'apparition de l'épidémie du coronavirus concernant les sources potentielles de l'origine de la transmission du SRAS-CoV-2 à l'homme.

- L'organisation mondiale de la santé (OMS) stipule que l'origine est due :
  - à une transmission de l'animal à l'homme (soit directe soit via un hôte animal intermédiaire) à 55%,
  - à une transmission par certains aliments surgelés dans la chaîne du froid ou à une éventuelle évasion d'un laboratoire à 30%,
  - à une transmission de l'animal à l'homme directe à 13%.
- Les experts chinois affirment que le virus est causé par une transmission de l'animal à l'homme via un hôte animal intermédiaire à 68%. Par ailleurs, ils excluent l'hypothèse que le virus soit échappé d'un laboratoire.
- L'administration américaine atteste qu'une éventuelle évasion d'un laboratoire en est responsable à 75%.
- L'opinion publique est dans l'ignorance totale.

1- Représentez ces connaissances en utilisant la théorie de Dempster et Shafer.
2- Comment prendre en compte les quatre expertises. Explicitez chaque étape.
3- Que pouvez-vous en déduire ?

Solution :

1- Modélisation des connaissances avec la théorie des fonctions de croyance

Soient les symboles suivants :

TAHD : Transmission de l'Animal à l'Homme Directe,

TAHI : Transmission de l'Animal à l'Homme via un hôte animal Intermédiaire,

TALS : Transmission par certains ALiments Surgelés dans la chaîne du froid

ELAB : une éventuelle Evasion d'un LABoratoire.

Soit Ω={TAHD,TAHI,TALS,ELAB }

Expert 1 (OMS) :

M_1({TAHD,TAHI})= 0.55

M_1({TALS,ELAB})= 0.3

M_1({TAHD})= 0.13

$M_1(\Omega)$=0.02

Expert 2(Chinois) :

M_2({TAHI})= 0.68

M_2({TAHD,TAHI,TALS})=0.32

Expert 3(Administration Américaine)

M_3({ELAB })= 0.75

$M_3(\Omega)$= 0.25

Expert 4 (Opinion publique)

$M_4(\Omega)$= 1 : cas de l'ignorance totale

2- La combinaison des différentes expertises se fait à l'aide de la rège de Dempster. Les distributions de masses sont combinées deux à deux. L'ordre de combinaison n'est pas important car aucune priorité n'est affectée aux experts.

La distribution de masse résultante doit respecter les propriétés affectées aux distributions de masse à savoir :

$$\sum M(A) = 1$$

$M(\emptyset)= 0$

a- La combinaison de deux distributions de masse m_1 et m_2 se fait comme suit :

$m(A)=\frac{1}{1-k}\sum_{B\cap C=A} m1(B) * m2(C)$

Avec k qui représente le degré de conflit. Il est défini par :

$K=\sum_{B\cap C=\emptyset} m1(B) * m2(C)$

La combinaison de m_1 et m_2 est réalisée comme suit :

M_2 / M_1	{TAHI} 0.68	{TAHI,TAHD,TALS} 0.32
{TAHD,TAHI} 0.55	{TAHI} 0.374	{TAHI,TAHD} 0.176
{TALS,ELAB} 0.30	$\emptyset$ 0.204	{TALS} 0.096
{TAHD} 0.13	$\emptyset$ 0.0884	{TAHD} 0.0416
Ω 0.02	{TAHI} 0.0136	{TAHI,TAHD,TALS} 0.0064

$K=M_1(\{TALS,ELAB\})*M_2(\{TAHI\})+M_1(\{TAHD\})*M_2(\{TAHI\})= 0.2924$

$M_{12}(\{TAHI\}) = \frac{1}{1-k} *(M_1(\{TADH,TAHI\})*M_2(\{TAHI\})+M_1(\Omega)*M_2(\{TAHI\}))= 0.5477$

$M_{12}(\{TAHI,TAHD\}) = \frac{1}{1-k} *(M_1(\{TAHI,TAHD\})*M_2(\{TAHI,TAHD,TALS\}))= 0.2487$

$M_{12}(\{TALS\}) = \frac{1}{1-k} *(M_1(\{TALS,ELAB\})*M_2(\{TAHI,TAHD,TALS\})) =0.1356$

$M_{12}(\{TAHD\}) = = \frac{1}{1-k} *(M_1(\{TAHD\})*M_2(\{TAHI,TAHD,TALS\})) =0.0587$

$M_{12}(\{TAHI,TAHD,TALS\}) = \frac{1}{1-k} *(M_1(\Omega)*M_2(\{TAHI,TAHD,TALS\})) = 0.009$

$$\sum M12(A) = 1$$

$M_{12}(\emptyset)= 0$

b- La combinaison de m_{12} et m_3 est réalisée comme suit :

M_{12} / M_3	{TAHI} 0.5477	{TAHI,TAHD} 0.2487	{TALS} 0.1356	{TAHD} 0.0587	{TAHI,TAHD,TALS} 0.009
{ELAB} 0.75	$\emptyset$ 0.4107	$\emptyset$ 0.1865	$\emptyset$ 0.1017	$\emptyset$ 0.044	$\emptyset$ 0.0067
Ω 0.25	{TAHI} 0.1369	{TAHI,TAHD} 0.0621	{TALS} 0.0339	{TAHD} 0.0146	{TAHI,TAHD,TALS} 0.0022

$K'= M_{12}(\{TAHI\})*M_3(\{ELAB\})+M_{12}(\{TAHI,TAHD\})*M_3(\{ELAB\})+ M_{12}(\{TALS\})*M_3(\{ELAB\}) + M_{12}(\{TAHD\})*M_3(\{ELAB\})+ M_{12}(\{TAHI,TAHD,TALS\})*M_3(\{ELAB\}) =0.7496$

$M_{123}(\{TAHI\}) = \frac{1}{1-k'} *(M_{12}(\{TAHI\})*M_3(\Omega))=0.5467$

$M_{123}(\{TAHI,TAHD\}) = \frac{1}{1-k'} *(M_{12}(\{TAHI,TAHD\})*M_3(\Omega))= 0.248$

$M_{123}(\{TALS\}) = \frac{1}{1-k'} *(M_{12}(\{TALS\})*M_3(\Omega))= 0.1353$

$M_{123}(\{TAHD\}) = \frac{1}{1-k'} *(M_{12}(\{TAHD\})*M_3(\Omega)) = 0.0583$

$M_{123}(\{TAHI,TADH,TALS\}) = \frac{1}{1-k'} *(M_{12}(\{TAHI,TAHD,TALS\})*M_3(\Omega)) = 0.0087$

$$\sum M123(A) = 1$$

$M_{123}(\emptyset)= 0$

c- La quatrième expertise correspond au cas de l'ignorance totale. Elle ne va pas modifier la distribution de masse obtenue à partir de la combinaison des trois premières expertises.

Remarque: L'ordre de combinaison des différentes distributions de masse n'affecte pas la distribution de masse résultante.

3-En conclusion, l'hypothèse de la transmission d'animal à l'homme via un hôte intermédiaire est la plus soutenue. Il est aussi possible de déduire l'hypothèse la plus soutenue à partir des intervalles de confiance des éléments focaux de la distribution finale obtenue (M_{123}).

TP N°1 :

En exploitant une des boites à outils modélisant la théorie des fonctions de croyance, modélisez les exercices 4 et 5 de la série.

Liens vers quelques boites à outils :
https://www.softpedia.com/get/Science-CAD/Dempster-Shafer-Engine.shtml

http://people.irisa.fr/Arnaud.Martin/toolboxes/
https://bfasociety.org/#software
https://cran.r-project.org/web/packages/ipptoolbox/